УДК 536.421

М.Г. Бердник
Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет", Україна
Україна, 49005, м. Дніпропетровськ, проспект Карла Маркса, 19

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМІНУ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

M. G. Berdnyk
State Higher Education Institution "National Mining University", Ukraine
Ukraine, 49005, Karl Marx avenue, 19.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER OF THE GENERALIZED NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF A CYLINDER WHICH ROTATES

М.Г. Бердник
Государственное высшее учебное заведение "Национальный горный университет", Украина
Украина, 49005, г. Днепропетровск, проспект Карла Маркса, 19

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ТЕПЛООБМЕНА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища. Знайдено температурне поле порожнього циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ нескінченної довжини з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів.
Ключові слова: крайова задача Неймана, інтегральне перетворення, час релаксації.

The generalized equation of an energy balance for a driven element of continuum is obtained. As a result of usage of an obtained equation the non-stationary temperature field rotaried with a stationary value by angular rate ω around of an axes OZ empty inside the cylinder was retrieved, in view of final value of speed of heat, as orthogonal numbers(series) on higher transcendental functions
Key words: Neumann boundary value problem, integral transformation, relaxation time**.**

В статье получено обобщенное уравнение баланса энергии для движущегося элемента сплошной среды. В результате использования полученного уравнения было найдено нестационарное температурное поле вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OZ цилиндра, с учетом конечной величины скорости распространения тепла, в виде ортогональных рядов по специальным функциям.
Ключевые слова: краевая задача Неймана, интегральное преобразование, время релаксации.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [3, 4]. Однак, при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [3]. У [3] показано, що рівняння переносу енергії у випадку узагальненого закону

теплопровідності Фур'є справедливо для одномірного, однорідного і стаціонарного простору.

Питання про можливості узагальнення рівняння переносу на тривимірний випадок розглянутий у [4].

Метою роботи є розробка нових узагальнених тривимірних математичних моделей температурних розподілів у рухомому середовищі у вигляді крайових задач математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв’язання отриманих крайових задач для рівняння теплопровідності, розв’язки яких використовуються під час керування температурними полями.

Постановка задачі

Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля суцільного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на поверхні циліндра тепловий потік не залежить від часу $G(\varphi, z)$.

В роботі [1] одержано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища:

$$\gamma\,\mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\overline{V}\cdot qradT+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}\cdot qradT\right)\right]\right\}=\left(\nabla\cdot\left(\lambda\cdot\nabla T\right)\right)-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\nabla\cdot\overline{V}\right)-$$
$$\left(\nabla\cdot\left[\tau\cdot\overline{V}\right]\right)+\left(\overline{V}\cdot\left[\nabla\cdot\tau\right]\right)-\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\nabla\cdot\left(\lambda\cdot\nabla T\right)\right)-T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\nabla\cdot\overline{V}\right)-\left(\nabla\cdot\left[\tau\cdot\overline{V}\right]\right)+\right.$$
$$\left.\left(\overline{V}\cdot\left[\nabla\cdot\tau\right]\right)\right\} \tag{1}$$

де γ – щільність середовища; c-питома теплоємність; τ – тензор напруг; $\overline{V}$– вектор локальної швидкості середовища; ∇- оператор Гамильтона “набла”; Р – тиск; Т – температура середовища; t – час; τ_r – час релаксації, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Згідно з (1) узагальненим рівнянням балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, у циліндричній системи координат (ρ, φ, z) набуває вигляду:

$$\gamma\,\mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}+\omega\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (2) в області $D=\left\{(\rho,\varphi,z,t)\middle|\rho\in(0,1),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{z}\in(0,1),\mathrm{t}\in(0,\infty)\right\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \quad (3)$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \quad (4)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \left.\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=V(\varphi,z) \quad (5)$$

$$\theta(\rho,\varphi,0,t)=0,\quad \theta(\rho,\varphi,1,t)=0, \quad (6)$$

де $\theta=\frac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура циліндра; $\rho=\frac{r}{R}$; R – зовнішній радіус циліндра; $\chi=(R/L)^2$; $a=\frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності; $V(\varphi,z)=\frac{G(\varphi,z)\tau_r}{\lambda}$, $V(\varphi,z)\in C(D)$.

Розв'язок задачі

Тоді розв'язок крайової задачі (3)-(6) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3,5], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $V(\varphi,z)$, $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [5]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ V_n(z)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \quad (7)$$

де

$$\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ V_n(z)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\varphi)d\varphi;$$

$\theta_n(\rho,z,t)=\theta_n^{(1)}(\rho,z,t)+i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t)$, $V_n(z)=V_n^{(1)}(z)+i\,V_n^{(2)}(z)$, i – уявна одиниця. З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для n=0,1,2,…,тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно-спряженими [5]. Підставляючи значення функцій з (7) у (3)-(6) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)}+\chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \quad (8)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)=0,\qquad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t}=0 \quad (9)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = V_n^{(i)}(z), \qquad (10)$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho,0,t) = 0, \qquad \theta_n^{(i)}(\rho,1,t) = 0, \qquad (11)$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n; \quad \vartheta_n^2 = \omega n; \quad m_1 = 2; \quad m_2 = 1$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (8) інтегральне перетворення Ханкеля [2,4]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_0^1 \rho\, f(\rho) J_n(\mu_{n,k}\rho) d\rho,$$

де $J_n(x)$ – функція Бесселя $1^{го}$ роду $n^{го}$ порядку; $\mu_{n,k}$ – корені трансцендентного рівняння $J_n'(\mu_{n,k}) = 0$, при $n \neq 0$ $k = 1,2,3,\ldots$ при $n = 0$ $k = 0,1,2,3,\ldots,$ $\mu_{00} = 0$.

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{n,k}^2 \cdot J_n(\mu_{n,k}\rho)}{(\mu_{n,k}^2 - n^2) J_n^2(\mu_{n,k})} \bar{f}(\mu_{n,k}).$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\left[\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(m_i)}}{\partial t}\right] + \tau_r \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial t^2} = \frac{a}{R^2}\left[J_n'(\mu_{n,k}) V_n^{(i)} - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right]. \qquad (12)$$

з початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(z,0) = 0, \qquad \frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}(z,0)}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

і граничними умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(0,t) = 0, \qquad \bar{\theta}_n^{(i)}(1,t) = 0, \qquad i=1,2. \qquad (14)$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (12) інтегральне перетворення Фур'є :

$\hat{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x)\sin(\pi \cdot m \cdot x)\, dx$, де $\lambda_m = \pi \cdot m$; m=1,2,…,а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi \cdot m \cdot x) \cdot \hat{f}(\lambda_m).$$

У результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\hat{\bar{\theta}}_n^{(i)}}{dt} + \vartheta_n^{(i)}\left[\hat{\bar{\theta}}_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{d\hat{\bar{\theta}}_n^{(m_i)}}{dt}\right] + \tau_r \frac{d^2 \hat{\bar{\theta}}_n^{(i)}}{dt^2} = \frac{a}{R^2}\left[J_n'(\mu_{n,k}) \hat{V}_n^{(i)} - (\mu_{n,k}^2 + \lambda^2{}_m)\hat{\bar{\theta}}_n^{(i)}\right] \qquad (15)$$

з початковими умовами

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}(z,0)=0,\qquad \frac{\partial\bar{\tilde{\theta}}_n^{(i)}(z,0)}{\partial t}=0$$

Застосовуємо до системи звичайних диференціальних рівнянь (15) інтегральне перетворення Лапласа:

$$\tilde{f}(s)=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau .$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}$:

$$s\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{J_n'(\mu_{n,k})\tilde{V}_n^{(i)}}{\mu_{n,k}^2+\lambda^2{}_m}-\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}\right), \qquad (16)$$

де i=1,2; $q_{n,k}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}\cdot\left(\mu_{n,k}^2+\lambda^2{}_m\right)$.

Розв’язавши систему рівнянь (18), одержуємо:

$$\tilde{\bar{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\tilde{V}_n^{(i)}\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)+(-1)^{i+1}\omega n\tilde{V}_n^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2},\ \text{(i=1,2)} \qquad (17)$$

де $\alpha_{n,k}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2}\mu_{n,k}\,J_n'(\mu_{n,k})$.

Застосовуючи до зображення функцій (17) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(1)}(t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\hat{V}_n^{(1)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]+\hat{V}_n^{(2)}\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\hat{V}_n^{(1)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]+\hat{V}_n^{(2)}\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\right]\right\}$$
$$\cdot\left(e^{s_j t}-1\right) \qquad (18)$$

$$\bar{\tilde{\theta}}_n^{(2)}(t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\hat{V}_n^{(2)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\right]-\hat{V}_n^{(1)}\cdot\left[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right)+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\left\{\hat{V}_n^{(2)}\cdot\left[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\right]-\hat{V}_n^{(1)}\cdot\left[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)\right]\right\}$$
$$\left(e^{s_j t}-1\right) \qquad (19)$$

$\zeta_{n,k}(s_j)=\frac{0.5s_j^{-1}}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами:

$$s_{1,2}=\frac{(\tau_r\omega ni-1)\pm\sqrt{(1+\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\ s_{3,4}=\frac{(\tau_r\omega ni+1)\pm\sqrt{(1-\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень одержуємо температурне поле суцільного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\bar{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t)+i\cdot\bar{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t)\right]\sin(\pi\,\mathrm{m}\,\mathrm{z})\right\rangle\cdot\Psi_{\mathrm{n,k}}\right\}\cdot\exp(in\varphi)$$

$\bar{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t)$, $\bar{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t)$ визначаються за формулами (18), (19);

$$\Psi_{n,k}=\frac{\mu_{n,k}^2\cdot J_n(\mu_{n,k}\rho)}{(\mu_{n,k}^2-n^2)J_n^2(\mu_{n,k})}.$$

Висновки

Отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища (1). Знайдено температурне поле суцільного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціях Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (у супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

Література

1. Бердник М.Г..Математичне моделювання температурного поля в циліндрі, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: РВВ ДНУ,2005.–С.37–44.
2. Галицын А.С., Жуковский А.И. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности/А.С.Галицын, А.И. Жуковский.– Киев., Наук.думка. 1979. – 561 с.
3. Лакуста Л.В., Тимофеев Ю.А. Некоторые оценки границ применимости гиперболического уравнения теплопроводности / Л.В.Лакуста, Ю.А.Тимофеев. // ИФЖ. – 1979, т.37. – №2. С. 366-370
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – Киев., Наукова думка, 1976. – 310 С.
5. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – М., Наука, 1980. – 384 С.

Literatura

1. .Berdnyk M.G.. Mathematical simulation of temperature field in cylinder, taking into account the finite velocity of propagation of heat//Questions of applied mathematics and mathematical modeling. –: RVV DNU,2005 p. 37-44.
2. Galitsin A.S., Zhukovsky A.I.Integral transforms and special functions in problems of thermal conductivity/A.S. Galitsin, A.I. Zhukovski.-Kiev, Naukova dumka. 1979-561 with.
3. Lakusta, L. V., Timofeev Y.A. Some assessment boundaries the applicability of hyperbolic heat conduction equation/L.V. Lakusta, Y.A. Timofeev.//IFZ-1979, vol. 37-No. 2 p. 366-370
4. Podstrigac Y.S., Kolano Y.M. Synthesis of thermal mechanics/Y.S,. Podstrigac ,Y.M. Kolano .-Kiev, Naukova dumka, 1976-310 s.
5. Tolstov G.P. Fourier Series/G.P. Tolstov.-M., Science, 1980-384 .

RESUME

M.G. Berdnyk

Mathematical modeling of heat transfer of the generalized Neumann boundary value problem of a cylinder which rotates

In this article the calculation of the non-stationary temperature field of continuous cylinder is examined that runs around with a permanent angulator about axis of OZ of eventual length of L taking into account eventual speed of distribution of heat. Thermo physical properties of that do not depend on a temperature, and the internal sources of heat are absent. In initial moment of time the temperature of cylinder is permanent , and on the surface of cylinder a thermal stream does not depend on time.

The generalized equalization of transfer of energy is in-process got for the motive element of continuous environment.

It was set forth the regional task of Neumann is generalized to the heat exchange of cylinder, that runs around, taking into account extremity of size of speed of distribution of heat. By means of integral transformations of Hankel and Laplace the temperature field of continuous cylinder that runs around is found, taking into account extremity of size of speed of distribution of heat as ortogonal rows on the special functions of Bessel of sort of order and Fourier . Found analytical decision of the generalized regional task of Neumann to the heat exchange of cylinder, that runs around, taking into account extremity of size of speed of distribution of heat can find application at modulation of the temperature fields that arise up in many technical systems (in companions, rental rollers, turbines and т.і.).

М.Г. Бердник

Математичне моделювання просторової узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра, який обертається

У даній статті розглядається розрахунок нестаціонарного температурного поля суцільного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на поверхні циліндра тепловий потік не залежить від часу $G(\varphi, z)$.

У роботі одержано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища.

Була сформульована узагальнена крайова задача Неймана теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. За допомогою інтегральних перетворень Ханкеля і Лапласа знайдене температурне поле суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла у вигляді ортогональних рядів по спеціальних функціях Бесселя $1^{го}$ роду $n^{го}$ порядку і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла, може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (у супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

Надійшла до редакції 01.07.2015

